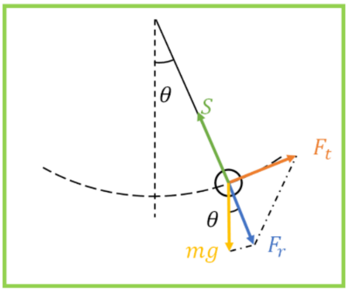
問題文は著作権の観点から、掲載していません。



与えられている条件は次のとおりです。

1. 長さLのひもの一端を点Oで固定し、他点に質量mのおもりをつけた。
2. 鉛直面内でおもりを振動させたところ、糸の張力Sと重力の作用を受けた。
3. 半径Lの円弧上を往復運動した。
3. 重力加速度はgです。

問 3-1. 振り子の運動方程式と周期

(1) おもりにはたらく力

接線方向の力は、張力との内積が 0 であることから張力の影響は受けない。(ここで θ が増える方に負をとっていることに注意)よって

$$mg\sin\theta(t) \tag{1}$$

また、法線方向の力のおおきさは

$$S - mg\cos\theta(t)$$

(2) 接線方向の成分

弧の長さは「ラジアン × 半径」であるから、最下点からの円弧の長さは$L\theta(t)$。運動方程式$m\frac{d^2x}{dt}$に対応させたい。まず、接線成分の速度は

$$v = \frac{d}{dt}L\theta(t) = L\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{2}$$

これをさらに、微分して加速度を求めると、

$$a = \frac{dv}{dt} = L\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

(3) 接線方向・法線方向の運動方程式

接線方向の運動方程式は式(1)を用いて

$$mL\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -mg\sin\theta(t)$$

まず、振り子は同じ半径で行ったり来たりしていることから、「円運動」であることがわかり、すなわち向心力が加わっている。このことから、力の釣り合いは

$$-\frac{mv^2}{L} = F_r - S$$

である。vを式(2)、$F_r - S$は求めているので、次のように運動方程式が立てられる。

$$mL\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 = S - mg\cos\theta$$

(4) 時刻tのおもりの速さ

点Oの水平方向を基準にしたとき、エネルギー保存則より

$$-mgL\cos\theta_0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgL\cos\theta(t)$$

これを整理すると

$$v(t) = \sqrt{2gL(\cos\theta(t) - \cos\theta_0)}$$

（5）振り子の近似と周期

$\sin\theta(t) \simeq \theta(t)$と近似できるとき、式(1)より、

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta(t)$$

これは、単振動の式（$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 t \to x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$）を当てはめることができる。よって、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

問 3-2. 振り子の振幅がより大きくなると、近似が使えなくなる。そのとき(5)に比べて周期は長くなるか短くなるか求めよ。

復元力の大きさが

$$mg|\sin\theta(t)| < mg|\theta(t)|$$

であるから、周期は(5)より大きくなるため周期は長くなる