問題文は著作権の観点から、掲載していません。

与えられている条件は次のとおりです。

1. 質量mの物体を$t = 0$から初速度0で落下させています。
2. 軸の方向は、鉛直下向きの正の方向です。
3. 重力加速度はgです。

問 2-1. 物体に粘性抵抗λのみはたらく場合

（1） 運動方程式を求める。

粘性抵抗は速度に比例して、重力方向と反対側にかかります。落下していることから、物体の速度は$v(t)$。
粘性抵抗は落下とは逆向きのx軸に対して負の方向に加わることから

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - \lambda v(t) \tag{1}$$

（2）落下後、十分に時間が経過したあとの終端速度を求める。

終端速度は加速度が 0 になることから、(1)の式に$\frac{dv(t)}{dt} = 0, v(t) = v_\infty$を代入して

$$0 = mg - \lambda v_\infty$$

$$v_\infty = \frac{mg}{\lambda}$$

（3）(1)で求めた運動方程式を、初期条件を含めて解く。

式(1)を整理すると「変数分離法」で解くことができます

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - \lambda v(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\lambda}{m}\left(v(t) - \frac{mg}{\lambda}\right)$$

$$\frac{dv(t)}{\left(v(t) - \frac{mg}{\lambda}\right)} = -\frac{\lambda}{m}dt$$

この形に変形して、両辺を積分すると

$$\int \frac{dv(t)}{\left(v(t) - \frac{mg}{\lambda}\right)} = \int -\frac{\lambda}{m}dt$$

$$\log\left(v(t) - \frac{mg}{\lambda}\right) = -\frac{\lambda}{m}t + C$$

初期条件$v(0) = 0$を代入して、積分定数Cを求めると、

$$\log\left(v(t) - \frac{mg}{\lambda}\right) = -\frac{\lambda}{m} \times 0 + C, \qquad \therefore C = \log\left(\frac{mg}{\lambda}\right)$$

求めた積分定数から式は、

$$\log\left(v(t) - \frac{mg}{\lambda}\right) = -\frac{\lambda}{m}t + \log\left(-\frac{mg}{\lambda}\right)$$

解答欄に合わせて、式を整理すると

$$\log\left(\frac{v(t)-\frac{mg}{\lambda}}{-\frac{mg}{\lambda}}\right)=-\frac{\lambda}{m}t$$

$$v(t)=\frac{mg}{\lambda}\left(1-\exp\left(-\frac{\lambda}{m}t\right)\right)$$

(4) 物体の速度が終端速度の半分$v_\infty/2$となる時刻を求めよ。

終端速度v_∞は(2)より$v_\infty=\frac{mg}{\lambda}$であるから、その半分の$\frac{v_\infty}{2}=\frac{mg}{2\lambda}$となる時刻を求めれば良い。よって、$v(t)=\frac{mg}{2\lambda}$を代入して、

$$\frac{mg}{2\lambda}=\frac{mg}{\lambda}\left(1-\exp\left(-\frac{\lambda}{m}t\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}=1-\exp\left(-\frac{\lambda}{m}t\right)$$

$$\frac{1}{2}=\exp\left(-\frac{\lambda}{m}t\right)$$

両辺対数をとって、

$$\ln\frac{1}{2}=-\frac{\lambda}{m}t$$

$$t=\frac{m}{\lambda}\ln 2$$

問 2-2. 物体に慣性抵抗κのみはたらく場合

(1) 運動方程式を求める。

慣性抵抗は速度の 2 乗に比例する。向きは粘性抵抗のときと同様に、は落下とは逆向きのx軸に対して負の方向に加わることから

$$m\frac{dv(t)}{dt}=mg-\kappa v^2(t) \tag{2}$$

(2) 微分方程式で解けるように式を変形する。

次の部分分数分解の式があります。

$$\frac{1}{a^2-b^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)$$

(1)の式を次のように変形します。

$$m\frac{dv(t)}{dt}=mg-\kappa v^2(t)$$

$$\frac{m}{\kappa}\frac{dv(t)}{\left(\frac{mg}{\kappa}-v^2(t)\right)}=dt$$

ここで、$a^2=\frac{mg}{\kappa}, b^2=v^2(t)$としたとき、最初に示した式を用いると

$$\frac{m}{\kappa}\frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{k}}}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}}+v(t)}-\frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-v(t)}\right)=dt \qquad (3)$$

式(3)の両辺を積分する。

$$\frac{m}{\kappa}\frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{k}}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}}+v(t)}-\frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-v(t)}\right)dv(t)=\int dt$$

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}}+v(t)}-\frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-v(t)}\right)dv(t)=2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}\int dt$$

$$\log\left(\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}+v(t)}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-v(t)}\right)=2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t+C$$

初期条件$v(0)=0$を代入して、積分定数Cを求めると、

$$\log\left(\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}+0}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-0}\right)=2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}\times 0+C, \qquad \therefore C=0$$

よって、

$$\log\left(\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}+v(t)}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-v(t)}\right)=2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t$$

解答欄に合わせて、式を整理すると

$$v(t)=\sqrt{\frac{mg}{\kappa}}\frac{1-\exp\left(-2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t\right)}{1+\exp\left(-2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t\right)} \qquad (4)$$

さらに、終端速度v_∞は、加速度が0より、式(2)に代入して、

$$0=-mg+\kappa v_\infty^2$$

$$|v_\infty|=\sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$$

これの半分が、$\frac{|v_\infty|}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$であり、式(4)に代入して

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{\kappa}}=\sqrt{\frac{mg}{\kappa}}\frac{1-\exp\left(-2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t\right)}{1+\exp\left(-2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t\right)}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1-\exp\left(-2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t\right)}{1+\exp\left(-2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t\right)}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\exp\left(-2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t\right) = 1-\exp\left(-2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t\right)$$

$$\frac{1}{3} = \exp\left(-2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t\right)$$

両辺対数をとって

$$\ln\frac{1}{3} = -2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t$$

$$t = \frac{\ln 3}{2}\sqrt{\frac{\kappa g}{m}}t$$

問 2-3. 雨滴の終端速度

次の条件をつかって、慣性抵抗κを求める。

1. 雨滴の抵抗力は主に慣性抵抗
2. 雨滴の直径 3 mm の球体
3. 終端速度は$7\ \mathrm{m/s}$であった。

水は$1\ \mathrm{g/ml}$であるとして、雨滴の質量を求めると

$$\frac{4\pi r^3}{3}\times 10^{-6} = \frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^3\times 10^{-6} = \frac{9\pi}{2}\times 10^{-6}\ \mathrm{kg}$$

問 2-2 の(3)で求めた式に代入して求めると

$$\kappa = \frac{mg}{v_\infty^2} = \frac{9\pi}{2}\times 10^{-6}\times 9.8\times\frac{1}{49} \simeq 3\times 10^{-6}\ \mathrm{kg/m}$$