

問題文は著作権の観点から、掲載していません。

与えられている条件は次のとおりです。

1. 水平で摩擦のない台の上にばね定数kの一端を固定し、他端に質量mのおもりをつけています。
2. ばねを自然長（原点O）のときの重りの位置からAだけ伸ばして$t=0$で離した。
3. 伸びる向きにx軸の正を取る。

問 2-1. 抵抗がない単振動

（1） 運動方程式を求める。

運動方程式は以下のように定まる。-方向に復元力が働くことに注意する。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \tag{1}$$

（2）初期条件を入れて運動方程式を求める。

バネの一般解（$x(t)=S\cos(\omega t)+T\sin(\omega t),\omega=\sqrt{k/m}$）を用いると、

$$x(t)=S\cos(\omega t)+T\sin(\omega t) \tag{2}$$

初期条件は$t=0$で、バネの長さAより、$x(0)=A$とすればよいので、

$$A=S\cos(0)+T\sin(0),\qquad \therefore S=A$$

また、式(2)を一回微分して、初期条件$t=0$のとき$v=0$を代入すると、

$$v=S\omega\sin(\omega t)+T\cos(\omega t)$$

$$0=-S\omega\sin(0)+T\omega\cos(\omega t),\qquad \therefore T=0$$

この 2 つの結果を式(2)に代入する。ここで、$\omega=\sqrt{k/m}$を戻すことを忘れずに

$$x(t)=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

（3）時刻tにおけるおもりの運動エネルギー

位置エネルギー（弾性エネルギー）は以下の式より与えられる。

$$E=\frac{1}{2}kx^2$$

これに、（2）で求めた$x(t)$を代入すると、

$$E_p=\frac{1}{2}k\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

（4）Aだけ伸びた位置から、Aだけ縮んだ位置までのばねの力がした仕事

$$W=\int_A^{-A}Fdx=\int_A^{-A}-kxdx=0$$

問 3-2. 粘性抵抗がはたらいた単振動

（1） 運動方程式について、位置$x(t)$を用いて書く。

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - \lambda\frac{dx(t)}{dt} \tag{3}$$

（2）運動方程式の変形

$k = m\omega^2$をもちいて、式(3)を書き直すと、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2x(t) = 0 \tag{4}$$

一般解$x(t) = X(t)\exp\left(-\frac{\lambda}{2m}t\right)$より、それぞれ 1 階微分と 2 階微分は

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(\frac{dX(t)}{dt} - \frac{\lambda}{2m}X(t)\right)\exp\left(-\frac{\lambda}{2m}t\right)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \left(\frac{d^2X(t)}{dt^2} - \frac{\lambda}{m}\frac{dX(t)}{dt} + \left(-\frac{\lambda}{2m}\right)^2X(t)\right)\exp\left(-\frac{\lambda}{2m}t\right)$$

であるから、式(4)に代入して整理すると、

$$\left[\left\{\frac{d^2X(t)}{dt^2} - \frac{\lambda}{m}\frac{dX(t)}{dt} + \left(-\frac{\lambda}{2m}\right)^2\right\} + \frac{\lambda}{m}\left(\frac{dX(t)}{dt} - \frac{\lambda}{2m}X(t)\right) + \omega^2X(t)\right]\exp\left(-\frac{\lambda}{2m}t\right) = 0$$

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \left(\omega^2 - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2\right)X(t) = 0$$

（3）$\omega > \lambda/2m$で、減衰振動する。このときの周期T_0を求める。

$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2}$と定義して、周期は$T = \frac{2\pi}{\omega_1}$であるから、

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2}}$$

問 3-3. 水を抜き、非線形なバネに取り替えた。ばねを自然長からyだけ伸ばすのに必要な力の大きさは$F(y) = k\left(y + \frac{y^3}{A^2}\right)$であり、自然長から$A$だけ伸ばして離すと振動した。重りの最大加速度の大きさと最大の速さを求めよ。

最も大きな加速度a_{MAX}は最もおおきな復元力がはたらく位置$x = \pm A$のときである。よって

$$|a_{MAX}| = \frac{F(A)}{m} = \frac{2kA}{m}$$

おもりがもっとも早く運動するのはおもりがばねの自然長に達したときであるので エネルギー保存則から

$$|v_{MAX}| = A\sqrt{\frac{3k}{2m}}$$