

問題文は著作権の観点から、掲載していません。

与えられている条件は次のとおりです。

1. 質量 m の物体を $t = 0$ から初速度0で落下させています。
2. 軸の方向は、鉛直上向きの正の方向です。
3. 重力加速度は g です。

問 2-1. 物体に粘性抵抗 λ のみはたらく場合

(1) 運動方程式を求めよ。

粘性抵抗は速度に比例して、重力方向と反対側にかかります。落下していることから、物体の速度は $-v(t)$ 。

粘性抵抗は落下とは逆向きの x 軸に対して正の方向に加わることから

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -mg + \lambda(-v(t))$$
$$m \frac{dv(t)}{dt} = -mg - \lambda v(t) \quad (1)$$

(2) 落下後、十分に時間が経過したあとの終端速度を求めよ。

終端速度は加速度が0になることから、(1)の式に $\frac{dv(t)}{dt} = 0, v(t) = v_\infty$ を代入して

$$0 = -mg - \lambda v_\infty$$

$$v_\infty = -\frac{mg}{\lambda}$$

(3) (1)で求めた運動方程式を、初期条件を含めて解く。

式(1)を整理すると「変数分離法」で解くことができます

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -mg - \lambda v(t)$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\lambda}{m} \left(\frac{mg}{\lambda} + v(t) \right)$$
$$\frac{dv(t)}{\left(\frac{mg}{\lambda} + v(t) \right)} = -\frac{\lambda}{m} dt$$

この形に変形して、両辺を積分すると

$$\int \frac{dv(t)}{\left(\frac{mg}{\lambda} + v(t) \right)} = \int -\frac{\lambda}{m} dt$$
$$\log \left(\frac{mg}{\lambda} + v(t) \right) = -\frac{\lambda}{m} t + C, \quad \left(0 > v(t) > v_\infty = -\frac{mg}{\lambda} \text{より絶対値を外した} \right)$$

初期条件 $v(0) = 0$ を代入して、積分定数 C を求めると、

$$\log \left(\frac{mg}{\lambda} + v(0) \right) = -\frac{\lambda}{m} \times 0 + C, \quad \therefore C = \log \left(\frac{mg}{\lambda} \right)$$

求めた積分定数から式は、

$$\log\left(\frac{mg}{\lambda} + v(t)\right) = -\frac{\lambda}{m}t + \log\left(\frac{mg}{\lambda}\right)$$

解答欄に合わせて、式を整理すると

$$\log\left(\frac{\frac{mg}{\lambda} + v(t)}{\frac{mg}{\lambda}}\right) = -\frac{\lambda}{m}t$$

$$v(t) = -\frac{mg}{\lambda}\left(1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{m}t\right)\right)$$

問 2-2. 物体に慣性抵抗 κ のみはたらく場合

(1) 運動方程式を求める。

慣性抵抗は速度の 2 乗に比例する。向きは粘性抵抗のときと同様に、は落下とは逆向きの x 軸に対して正の方向に加わることから

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -mg + \kappa(-v(t))^2$$

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -mg + \kappa v^2(t) \quad (2)$$

(2) 微分方程式で解けるように式を変形する。

次の部分分数分解の式があります。

$$\frac{1}{a^2 - b^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \right)$$

(1)の式を次のように変形します。

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -mg + \kappa v^2(t)$$

$$\frac{m}{\kappa} \frac{dv(t)}{\left(\frac{mg}{\kappa} - v^2(t)\right)} = -dt$$

ここで、 $a^2 = \frac{mg}{\kappa}$, $b^2 = v^2(t)$ としたとき、最初に示した式を用いると

$$\frac{m}{\kappa} \frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{\kappa}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} + v(t)} - \frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} - v(t)} \right) = -dt \quad (3)$$

(3) (2)で求めた運動方程式を、初期条件を含めて解いて、終端速度を求める。

式(3)の両辺を積分する。

$$\frac{m}{\kappa} \frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{\kappa}}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} + v(t)} - \frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} - v(t)} \right) dv(t) = \int -dt$$

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k} + v(t)}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k} - v(t)}} \right) dv(t) = -2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} \int dt$$
$$\log \left(\frac{\sqrt{\frac{mg}{k} + v(t)}}{\sqrt{\frac{mg}{k} - v(t)}} \right) = -2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} t + C$$

初期条件 $v(0) = 0$ を代入して、積分定数 C を求めると、

$$\log \left(\frac{\sqrt{\frac{mg}{k} + 0}}{\sqrt{\frac{mg}{k} - 0}} \right) = -2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} \times 0 + C, \quad \therefore C = 0$$

よって、

$$\log \left(\frac{\sqrt{\frac{mg}{k} + v(t)}}{\sqrt{\frac{mg}{k} - v(t)}} \right) = -2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} t$$

解答欄に合わせて、式を整理すると

$$v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \frac{1 - \exp\left(-2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} t\right)}{1 + \exp\left(-2\sqrt{\frac{\kappa g}{m}} t\right)}$$

さらに、終端速度 v_{∞} は、加速度が0より、式(2)に代入して、

$$0 = -mg + \kappa v_{\infty}^2$$

$$v_{\infty} = -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$$

問 2-3. 雨滴の終端速度

次の条件をつかって、終端速度の大きさ $|v_{\infty}|$ を有効数字 1 桁で求める。

1. 雨滴の抵抗力は主に慣性抵抗
2. 雨滴の直径 2 mm の球体
3. 慣性抵抗の大きさ $\kappa = 1 \times 10^{-6} \text{ kg/m}$

水は1 g/mlであるとして、雨滴の質量を求めると

$$\frac{4\pi r^3}{3} \times 10^{-6} = \frac{4\pi}{3} \times \left(\frac{2}{2}\right)^3 \times 10^{-6} = \frac{4\pi}{3} \times 10^{-6} \text{ kg}$$

問 2-2 の(3)で求めた式に代入して求めると

$$|v_{\infty}| = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3} \times 10^{-6} \times \frac{9.8}{10^{-6}}} \approx \sqrt{40} = 6 \text{ m/s}$$