©Hisui-clip.com

問題文は著作権の観点から、掲載していません。

与えられている条件は次のとおりです。

1. 水平で摩擦のない台の上にばね定数kの一端を固定し、他端に質量mのおもりをつけています。
2. ばねを自然長（原点O）のときの重りの位置からAだけ伸ばして$t = 0$で離した。
3. 伸びる向きにx軸の正を取る。

問 2-1. 抵抗がない単振動

（1） 運動方程式を求める。

運動方程式は以下のように定まる。-方向に復元力が働くことに注意する。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{1}$$

（2）初期条件を入れて運動方程式を求める。

バネの一般解（$x(t) = S\cos(\omega t) + T\sin(\omega t)\,, \omega = \sqrt{k/m}$）を用いると、

$$x(t) = S\cos(\omega t) + T\sin(\omega t) \tag{2}$$

初期条件は$t = 0$で、バネの長さAより、$x(0) = A$とすればよいので、

$$A = S\cos(0) + T\sin(0)\,, \qquad \therefore S = A$$

また、式(2)を一回微分して、初期条件$t = 0$のとき$v = 0$を代入すると、

$$v = S\omega\sin(\omega t) + T\cos(\omega t)$$

$$0 = -S\omega\sin(0) + T\omega\cos(\omega t)\,, \qquad \therefore T = 0$$

この 2 つの結果を式(2)に代入する。ここで、$\omega = \sqrt{k/m}$を戻すことを忘れずに

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

（3）時刻tにおけるおもりの運動エネルギー

位置エネルギー (弾性エネルギー) は以下の式より与えられる。

$$E = \frac{1}{2}kx^2$$

これに、（2）で求めた$x(t)$を代入すると、

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

（4）Aだけ伸びた位置から、Aだけ縮んだ位置までのばねの力がした仕事

$$W = \int_A^{-A} F dx = \int_A^{-A} -kx dx = 0$$

問 3-2. 動摩擦がはたらいた単振動

(1) 運動方程式は以下のように定まる。動摩擦は加わる力の逆方向に働くことに気をつける

 ©Hisui-clip.com

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) + \mu' mg \tag{3}$$

(2) 運動方程式の変形

考え方として、=(角速度)(ずれ) を再現したいから、式 (3) は

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -kx(t) + \mu' mg \\ &= -k\left(x(t) - \frac{\mu' mg}{k}\right) \end{aligned}$$

これより、$X(t) = x(t) - \frac{\mu' mg}{k}$を得る。

(3) バネが一番縮む時刻と位置を求めよ。

バネが縮む時刻は、$v = 0$であるから、

$$0 = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \qquad \therefore t = 0, \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$t = 0$は初期位置という意味であるので、$t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

また、位置について置き換えた$X(t)$で運動方程式を立てなおすと、

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2} = -kX(t)$$

初期条件を入れて解くと

$$x = \left(A - \frac{\mu' mg}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{\mu' mg}{k}$$

この式に対して、$t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$を代入して計算すると、

$$x = \left(A - \frac{\mu' mg}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \times \pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right) - \frac{\mu' mg}{k} = -A + \frac{2\mu' mg}{k}$$