

問題文は著作権の観点から、掲載していません。

与えられている条件は次のとおりです。

1. 水平方向にx軸、鉛直上方向にy軸を選ぶ。
2. 原点Oの位置から時刻$t=0$で水平面から角度θ、速さv_0で質量mの物体を投げる。
3. 重力加速度の大きさg、時刻tでの物体の位置のx成分を$x(t)$、y成分を$y(t)$とする。

問 2-1. 空気抵抗がない単振動

（1） 物体の運動方程式のx成分、y成分

運動方程式は以下のように定まる。-方向に復元力が働くことに注意する。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg \tag{1}$$

（2） 初期条件を入れて運動方程式を解く。

最初に問題文からわかる初期条件について考える。

初期位置$(x,y)=(0,0)$

物体の初速度$(v_x,v_y)=(v_0\cos\theta\,,v_0\sin\theta)$

物体に働く力$(F_x,F_y)=(0,-mg)$

(i) x成分

$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv_x}{dt}$として、(1)に代入して両辺を積分すると、

$$\int m\frac{dv_x}{dt}dt=\int 0dt$$
$$mv_x=C_1$$
$$v_x=C_1$$

初期条件$v_x=v_0\cos\theta$を与えると、$C_1=v_0\cos\theta$。よって、$v_x=v_0\cos\theta$である。同様に、$v_x=\frac{dx}{dt}$とすると、

$$\int\frac{dx}{dt}dt=\int v_0\cos\theta\,dt$$
$$x(t)=v_0\cos\theta\cdot t+C_2$$

初期条件$x(0)=0$であるから、

$$x(0)=v_0\cos\theta\times 0+C_2=0,\qquad \therefore C_2=0$$

すなわち、

$$x(t)=v_0\cos\theta\cdot t$$

(ii) y成分

$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv_y}{dt}$として、(1)に代入して両辺を積分すると、

$$\int m\frac{dv_y}{dt}dt = \int -mg dt$$

$$v_y = -gt + C_1$$

ここに、初期条件$v_y(0) = v_0 \sin\theta$であるから、

$$v_y(0) = -g\times 0 + C_1 = v_0\sin\theta, \qquad \therefore C_1 = v_0\sin\theta$$

よって、

$$v_y = -gt + v_0\sin\theta$$

である。同様に、$v_y = \frac{dy}{dt}$とすると、

$$\int \frac{dy}{dt}dt = \int -gt + v_0\sin\theta\, dt$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta\cdot t + C_2$$

初期条件$y(0) = 0$であるから、$C_2 = 0$。すなわち、

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta\cdot t$$

問 2-2. 粘性抵抗λがある場合を考える。

（1） 運動方程式を求める。

粘性抵抗は常に進む向きの逆向きに働くため、$-v(t)$である。よって

$$m\frac{dv_x(t)}{dt} = -\lambda v_x(t), \qquad m\frac{dv_y(t)}{dt} = -\lambda v_y(t) - mg$$

（2） 初期条件を与えて、運動方程式を解く。

(i) x方向

「変数分離法」でこの微分方程式を解きます。

$$m\frac{dv_x(t)}{dt} = -\lambda v_x(t)$$

$$\frac{dv_x(t)}{v_x(t)} = -\frac{\lambda}{m}dt$$

両辺を積分すると、

$$\log\left(v_x(t)\right) = -\frac{\lambda}{m}t + C_3$$

これに初期条件$v_x(0) = v_0\cos\theta$より、$C_3 = v_0\cos\theta$であるから、

$$v_x(t) = v_0\cos\theta\exp\left(-\frac{\lambda}{m}t\right)$$

(ii) y方向

$$m\frac{dv_y(t)}{dt} = -\lambda v_y(t) - mg$$

$$\frac{dv_y(t)}{dt} = -\frac{\lambda}{m}\left(v_y(t) + \frac{mg}{\lambda}\right)$$

$$\frac{dv_y(t)}{v_y(t)+\frac{mg}{\lambda}} = -\frac{\lambda}{m}dt$$

両辺を積分すると、

$$\int \frac{dv_y(t)}{v_y(t)+\frac{mg}{\lambda}} = \int -\frac{\lambda}{m}dt$$

$$\log\left(v_y(t)+\frac{mg}{\lambda}\right) = -\frac{\lambda}{m}t + C_4$$

これに初期条件$v_y(0) = v_0 \sin\theta$より、$C_4 = \log\left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{\lambda}\right)$であるから、

$$\log\left(v_y(t)+\frac{mg}{\lambda}\right) = -\frac{\lambda}{m}t + \log\left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{\lambda}\right)$$

$$v_y(t) = \left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{\lambda}{m}t\right) - \frac{mg}{\lambda}$$

（3）上記の結果を用いて質点が最高点に達する時刻を求めよ。

最高点に達するときの時刻$t = t_{top}$では、速度の鉛直成分はゼロとなるので、$v_y(t_{top}) = 0$。
(2)で求めた、$v_y(t)$に代入すると

$$v_y(t_{top}) = \left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{\lambda}{m}t_{top}\right) - \frac{mg}{\lambda} = 0$$

$$\exp\left(-\frac{\lambda}{m}t_{top}\right) = \frac{mg}{\lambda} \times \frac{1}{\left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{\lambda}\right)}$$

両辺対数を取って、

$$-\frac{\lambda}{m}t_{top} = \ln\left(\frac{mg}{\lambda} \times \frac{1}{\left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{\lambda}\right)}\right)$$

$$t_{top} = \frac{m}{\lambda}\ln\left(\frac{\lambda}{mg}v_0 \sin\theta + 1\right)$$